武汉大学

NSS CENTER

组合导航原理

Principle of Integrated Navigation

牛小骥 陈起金

武汉大学卫星导航定位技术研究中心

(GNSS Center of Wuhan University)

November 21

目录

组合导航系统

- 广义：任何两种及以上导航定位手段的组合
  - 交汇定位：GNSS、Loran、
  - 推算导航：INS、里程推算
  - 匹配定位：地形、视觉、道路、地磁/重力 匹配
- 狭义：至少含有一种推算导航手段
  - GNSS/INS
  - GNSS/车载DR
  - 早期航海、航空
  - 生物/人类导航

互补特性

什么是滤波器？

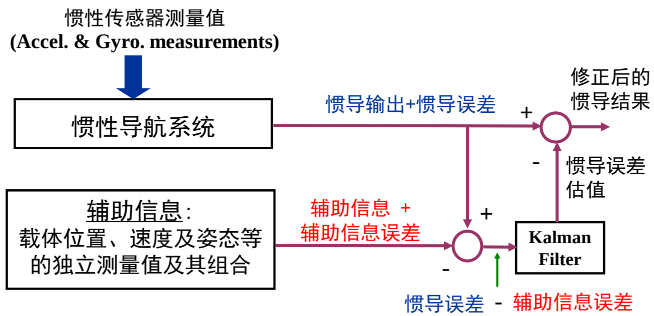
- 滤波就是从混合在一起的诸多信号中提取出所需的信号
- 滤波器必须知道待处理（分离）信号的明显特征（如模型）
  - 例：信号中夹杂着噪声

$$s+n \longrightarrow \boxed{\text{Filter}} \longrightarrow \hat{s}$$

- 滤波器估计信号s，需要预先知道信号s和噪声n的统计特性
  - 如果s为低频信号，而n为高频噪声，那么设计相应的低通滤波就可以过滤掉噪声n，分离出信号s
  - 必须知道信号s的特性

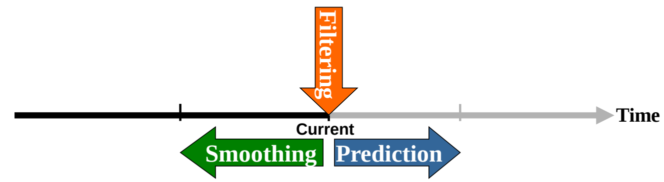
惯性导航中的卡尔曼滤波思想

- 带有辅助信息的惯性组合导航(Aided INS)中的互补滤波（卡尔曼滤波）思想

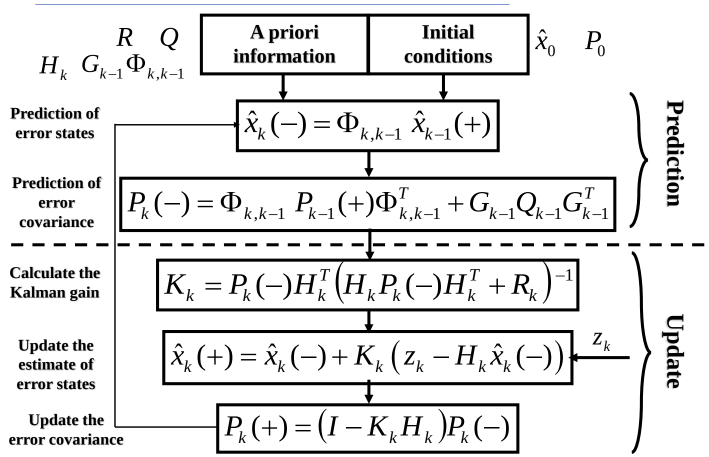


什么是最优估计？

- 最优估计是一种算法：从测量值中推断出最优的系统状态（误差最小）
  - 知道系统状态方程和量测方程
  - 假设系统噪声和测量噪声的统计特性
  - 系统初始化信息
- 三种最优估计问题：
  - 预测，滤波和平滑

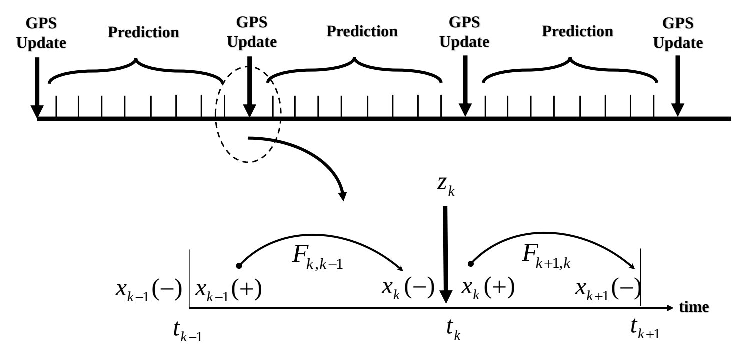


卡尔曼滤波算法



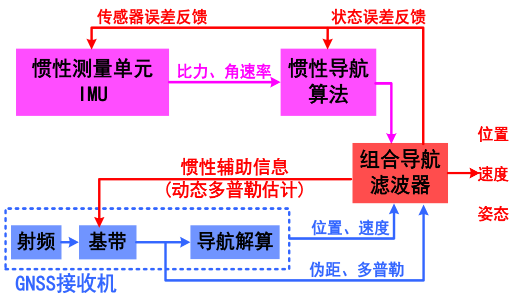
卡尔曼滤波算法

- 在大部分惯导应用中，卡尔曼滤波的新息更新频率一般低于滤波预测



GNSS/INS组合导航分类

- 根据信息融合深度不同，GNSS和INS组合方式分为：松组合、紧组合和深组合



- 松组合概念：基于GNSS
- 紧组合概念
- 深组合概念
- 特点

熟、实现难度高

Ref：张提升

GNSS/INS松组合观测方程（基础版）

- 根据给定测量值（GNSS定位）和系统状态向量x（惯导误差量）来构造观测向量 z
- 建立观测向量z与状态向量x的关系——观测方程

$$r_{GPS} = r + \delta_{r\_GPS}$$
$$r_{INS} = r + \delta_{r\_INS}$$

$$z \triangleq r_{INS} - r_{GPS} = \delta_{r\_INS} - \delta_{r\_GPS} = [I_{3\times3} \quad 0_{3\times12}] \cdot \begin{bmatrix}\delta_{r\_INS}\\ \vdots\end{bmatrix} - \delta_{r\_GPS}$$

GNSS/INS松组合算法

- 构建系统状态方程

GNSS/INS松组合常采用误差状态卡尔曼滤波（间接卡尔曼滤波）进行数据融合，以解决系统的非线性问题。根据惯导误差微分方程和传感器误差模型，将惯性传感器主要误差参数（加速度计和陀螺的零偏及比例因子误差）增广到卡尔曼滤波的系统状态中，可得卡尔曼滤波的状态向量及连续时间系统状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \left[\left(\delta \mathbf{r}_{INS}^{n}\right)^{T} \quad \left(\delta \mathbf{v}_{INS}^{n}\right)^{T} \quad \boldsymbol{\phi}^{T} \quad \mathbf{b}_{g}^{T} \quad \mathbf{b}_{a}^{T} \quad \mathbf{s}_{g}^{T} \quad \mathbf{s}_{a}^{T} \right]^{T}$$

$\delta \mathbf{r}_{INS}^{n}$为INS位置误差；$\delta \mathbf{v}_{INS}^{n}$为INS速度误差；$\boldsymbol{\phi}$ 为INS姿态误差；$\mathbf{b}_g$ 表示陀螺零偏；$\mathbf{b}_a$ 为加速度计零偏；$\mathbf{s}_g$ 为陀螺比例因子误差；$\mathbf{s}_a$为加速度计比例因子误差

GNSS/INS松组合算法

- 系统动态矩阵 – F阵

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix}
\mathbf{F}_{rr} & \mathbf{F}_{rv} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{F}_{vr} & \mathbf{F}_{vv} & \left(\mathbf{C}_b^n \boldsymbol{f}^b \times\right) & \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^n diag\left(\boldsymbol{f}^b\right) \\
\mathbf{F}_{\phi r} & \mathbf{F}_{\phi v} & -\left(\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times\right) & -\mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_b^n diag\left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right) & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1/\boldsymbol{t}_{gb} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1/\boldsymbol{t}_{ab} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1/\boldsymbol{t}_{gs} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1/\boldsymbol{t}_{as}
\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{rr} = \begin{bmatrix}
-\frac{v_D}{R_M+h} & 0 & \frac{v_N}{R_M+h} \\
\frac{v_E \tan\varphi}{R_N+h} & -\frac{v_D + v_N \tan\varphi}{R_N+h} & \frac{v_E}{R_N+h} \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}_{rv} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

GNSS/INS松组合算法

□ 系统动态矩阵 – F阵（续）

$$\mathbf{F}_{vr}=\begin{pmatrix} -\frac{2v_E\omega_e\cos\varphi}{R_M+h}-\frac{v_E^2\sec^2\varphi}{(R_N+h)(R_M+h)} & 0 & \frac{v_Nv_D}{(R_M+h)^2}-\frac{v_E^2\tan\varphi}{(R_N+h)^2} \\ \frac{2\omega_e(v_N\cos\varphi-v_D\sin\varphi)}{R_M+h}+\frac{v_Nv_E\sec^2\varphi}{(R_N+h)(R_M+h)} & 0 & \frac{v_Ev_D}{(R_N+h)^2}+\frac{v_Nv_E\tan\varphi}{(R_N+h)^2} \\ \frac{2v_E\omega_e\sin\varphi}{R_M+h} & 0 & -\frac{v_E^2}{(R_N+h)^2}-\frac{v_N^2}{(R_M+h)^2}+\frac{2g}{\sqrt{R_MR_N}+h} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{vv}=\begin{pmatrix} \frac{v_D}{R_M+h} & -2\omega_e\sin\varphi-\frac{2v_E\tan\varphi}{R_N+h} & \frac{v_N}{R_M+h} \\ 2\omega_e\sin\varphi+\frac{v_E\tan\varphi}{R_N+h} & \frac{v_D+v_N\tan\varphi}{R_N+h} & 2\omega_e\cos\varphi+\frac{v_E}{R_N+h} \\ -\frac{2v_N}{R_M+h} & -2\omega_e\cos\varphi-\frac{2v_E}{R_N+h} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{\phi r}=\begin{pmatrix} -\frac{\omega_e\sin\varphi}{R_M+h} & 0 & \frac{v_E}{(R_N+h)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{v_N}{(R_M+h)^2} \\ -\frac{\omega_e\cos\varphi}{R_M+h}-\frac{v_E\sec^2\varphi}{(R_N+h)(R_M+h)} & 0 & -\frac{v_E\tan\varphi}{(R_N+h)^2} \end{pmatrix},\quad \mathbf{F}_{\phi v}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{R_N+h} & 0 \\ -\frac{1}{R_M+h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tan\varphi}{R_N+h} & 0 \end{pmatrix}$$

GNSS/INS松组合算法

□ 状态方程离散化 – 状态转移矩阵

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\mathbf{F}(t)\boldsymbol{x}(t)+\mathbf{G}(t)\boldsymbol{w}(t)$$

为方便使用离散时间卡尔曼滤波的基本方程，首先需要上式进行离散化，构建离散时间状态方程：

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\mathbf{\Phi}_{k+1/k}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{w}_k$$

其中

$$\begin{cases}\mathbf{\Phi}_{k+1/k}=\exp\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbf{F}(t)dt\right)\\ \boldsymbol{w}_k=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbf{\Phi}(t_{k+1},t)\mathbf{G}(t)\boldsymbol{w}(t)dt\end{cases}$$

当F在 Δt 时间内变化不太剧烈，且 $\mathbf{F}(t_k)\Delta t\ll\mathbf{I}$ 时有：

$$\mathbf{\Phi}_{k+1/k}=\exp\{\mathbf{F}(t_k)\Delta t\}\approx\mathbf{I}+\mathbf{F}(t_k)\Delta t$$

GNSS/INS松组合算法

□ 状态方程离散化 – 噪声等效离散化

对驱动白噪声过程的等效离散化处理

$$\begin{cases}E[\boldsymbol{w}_k]=\mathbf{0}\\ E[\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_j^T]=\mathbf{Q}_k\delta_{kj}\end{cases}$$

系统噪声阵：

$$\mathbf{Q}_k=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbf{\Phi}(t_{k+1},t)\mathbf{G}(t)\mathbf{Q}\mathbf{G}^T(t)\mathbf{\Phi}^T(t_{k+1},t)dt$$

$\mathbf{Q}$为驱动白噪声（连续时间）的方差强度；可简化为梯形积分：

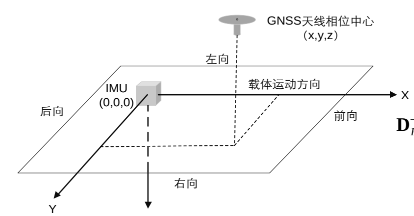
$$\mathbf{Q}_k\approx\frac{1}{2}\left[\mathbf{\Phi}_{k+1/k}\mathbf{G}(t_k)\mathbf{Q}(t_k)\mathbf{G}^T(t_k)\mathbf{\Phi}_{k+1/k}^T+\mathbf{G}(t_{k+1})\mathbf{Q}(t_{k+1})\mathbf{G}^T(t_{k+1})\right]\Delta t$$

GNSS/INS松组合算法

□ 观测方程：GNSS位置更新

GNSS定位解算给出的是天线相位中心（或其它参考点）的位置坐标，INS机械编排给出的是IMU测量中心的导航结果，二者在物理上不重合，组合导航解算时需进行杆臂效应改正。GNSS天线相位中心与IMU测量中心之间的位置转换关系式为

$$\boldsymbol{r}_{GNSS}^n=\boldsymbol{r}_{IMU}^n+\mathbf{D}_R^{-1}\mathbf{C}_b^n\boldsymbol{l}_{GNSS}^b$$



$$\mathbf{D}_R^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{R_M+h} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{(R_N+h)\cos\varphi} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

GNSS/INS松组合算法

GNSS位置更新

由INS导航结果及杆臂测量值推算出GNSS天线相位中心的位置为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{r}}_{GNSS}^{n} &= \hat{\boldsymbol{r}}_{IMU}^{n} + \hat{\mathbf{D}}_{R}^{-1}\hat{\mathbf{C}}_{b}^{n}\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b} \\ &= \boldsymbol{r}_{IMU}^{n} + \hat{\mathbf{D}}_{R}^{-1}\delta\boldsymbol{r}_{IMU}^{n} + \hat{\mathbf{D}}_{R}^{-1}\left[\mathbf{I}-(\boldsymbol{\phi}\times)\right]\mathbf{C}_{b}^{n}\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b} \\ &\approx \boldsymbol{r}_{GNSS}^{n} + \hat{\mathbf{D}}_{R}^{-1}\delta\boldsymbol{r}_{IMU}^{n} + \hat{\mathbf{D}}_{R}^{-1}\left(\mathbf{C}_{b}^{n}\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b}\times\right)\boldsymbol{\phi}\end{aligned}$$

GNSS定位解算得到的GNSS天线相位中心的位置表示为

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_{GNSS}^{n} = \boldsymbol{r}_{GNSS}^{n} - \hat{\mathbf{D}}_{R}^{-1}\boldsymbol{n}_{rG}$$

$\boldsymbol{n}_{rG}$为GNSS位置误差。一般地，为简化处理常将GNSS位置测量值的误差建模为白噪声序列

GNSS/INS松组合算法

GNSS位置更新

量测向量/观测向量表示为INS推算的位置与GNSS解算的位置之差

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}_{rGNSS} &= \hat{\mathbf{D}}_{R}\left(\hat{\boldsymbol{r}}_{GNSS}^{n} - \tilde{\boldsymbol{r}}_{GNSS}^{n}\right) \\ &\approx \hat{\mathbf{D}}_{R}\left(\hat{\mathbf{D}}_{R}^{-1}\delta\boldsymbol{r}_{IMU}^{n} + \hat{\mathbf{D}}_{R}^{-1}\left(\mathbf{C}_{b}^{n}\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b}\times\right)\boldsymbol{\phi} + \hat{\mathbf{D}}_{R}^{-1}\boldsymbol{n}_{rG}\right) \\ &\approx \delta\boldsymbol{r}_{IMU}^{n} + \left(\mathbf{C}_{b}^{n}\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b}\times\right)\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{n}_{rG}\end{aligned}$$

GNSS位置观测值的量测矩阵为

$$\mathbf{H}_{rGNSS} = \left[\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \left(\mathbf{C}_{b}^{n}\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b}\times\right) \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3\right]$$

GNSS/INS松组合算法

观测方程：GNSS速度更新

GNSS采用多普勒测速可以提供相对独立的三维速度观测值。根据IMU速度推算GNSS天线相位中心速度的理论模型为

$$\boldsymbol{v}_{GNSS}^{n} = \boldsymbol{v}_{IMU}^{n} - \left[\left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}\times\right)+\left(\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\times\right)\right]\mathbf{C}_{b}^{n}\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b} - \mathbf{C}_{b}^{n}\left(\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b}\times\right)\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$$

根据惯导机械编排得到的导航结果，可以推算得到GNSS天线相位中心的速度，忽略误差的二阶小量，忽略地球自转角速度$\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}$和$\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}$的误差

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{v}}_{GNSS}^{n} \approx\ & \boldsymbol{v}_{IMU}^{n} + \delta\boldsymbol{v}_{IMU}^{n} - \left(\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times\right)\mathbf{C}_{b}^{n}\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b} - \left(\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times\right)\left(\mathbf{C}_{b}^{n}\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b}\times\right)\boldsymbol{\phi} \\ & - \mathbf{C}_{b}^{n}\left(\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b}\times\right)\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} - \mathbf{C}_{b}^{n}\left(\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b}\times\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}\right)\times\boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_{b}^{n}\left(\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b}\times\right)\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}\end{aligned}$$

GNSS/INS松组合算法

GNSS速度更新

GNSS解算的天线相位中心速度为

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_{GNSS}^{n} = \boldsymbol{v}_{GNSS}^{n} - \boldsymbol{n}_{vG}$$

速度量测向量可表示为INS推算的速度与GNSS解算的速度之差：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}_{vGNSS} &= \hat{\boldsymbol{v}}_{GNSS}^{n} - \tilde{\boldsymbol{v}}_{GNSS}^{n} \\ &\approx \delta\boldsymbol{v}_{IMU}^{n} - \left(\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times\right)\left(\mathbf{C}_{b}^{n}\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b}\times\right)\boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_{b}^{n}\left(\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b}\times\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}\right)\times\boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_{b}^{n}\left(\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b}\times\right)\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} + \boldsymbol{n}_{vG}\end{aligned}$$

GNSS速度观测值的观测矩阵为

$$\mathbf{H}_{vGNSS} = \left[\mathbf{0}_3 \quad \mathbf{I}_3 \quad \mathbf{H}_{vG,3} \quad -\mathbf{C}_{b}^{n}\left(\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b}\times\right) \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{H}_{vG,6} \quad \mathbf{0}_3\right]$$

$$\begin{cases}\mathbf{H}_{vG,3} = -\left(\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times\right)\left(\mathbf{C}_{b}^{n}\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b}\times\right) - \left[\mathbf{C}_{b}^{n}\left(\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b}\times\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}\right)\times\right] \\ \mathbf{H}_{vG,6} = -\mathbf{C}_{b}^{n}\left(\boldsymbol{l}_{GNSS}^{b}\times\right)\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}\right)\end{cases}$$

GNSS/INS松组合算法

- 算法实现中的注意事项
  - 误差状态KF，在进行闭环反馈之后，被反馈的状态量部分应该置零
  - Q阵的设置
  - R阵的设置

附录
Appendices

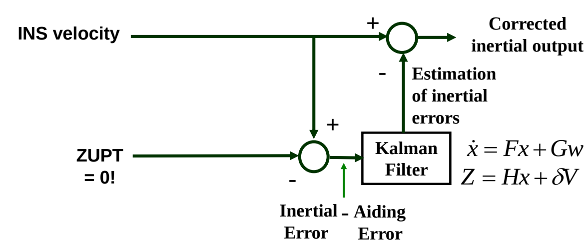
组合导航中的实用技巧

实用更新1 - ZUPT

- 零速修正（Zero velocity UPdaTe，ZUPT）
  - 在无连续外部更新的情况下，速度漂移会带来位置和姿态的精度发散，而零速修正能够显著提高纯惯导的导航精度
- 操作过程
  - 每2-4分钟停车一次，每次停车30-60 s
  - “速度为零”这一信息用作卡尔曼滤波的量测更新
- ZUPTs的优点
  - 几乎零成本（无需额外设备）
  - 不需要精确的时间同步
- 局限性
  - 必须有条件让载体静止（不适于空中和海上的应用）

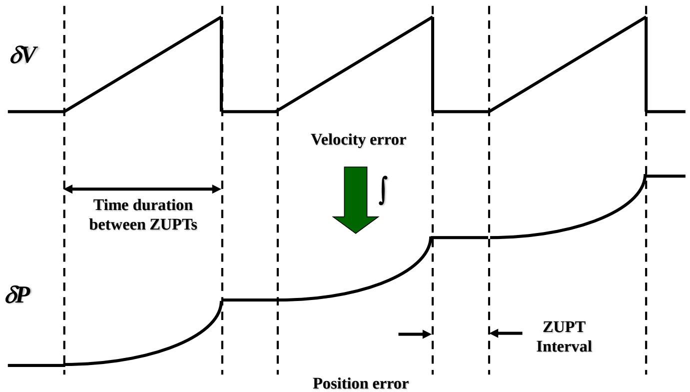
实用更新1 – ZUPT（续）

- ZUPT如何提高惯导测量精度
  - 为修复两次ZUPT修正之间INS速度误差，需要采用最优估计算法（例如卡尔曼滤波）
  - 每次ZUPT修正时，将INS输出的三轴速度与ZUPT速度（零速）之差作为量测信息输入到卡尔曼滤波中



实用更新1 – ZUPT（续）

- ZUPT更新期间和两次更新之间的速度和位置误差



实用更新1 – ZUPT（续）

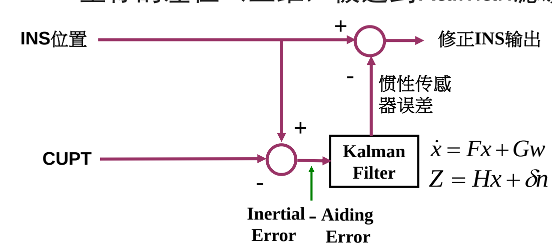
- 两个因素影响ZUPT的效果
  - 连续两次ZUPTs修正之间的时间间隔，期间速度误差随时间增长
  - ZUPTs更新时长需合理选择，使得卡尔曼滤波充分收敛
- ZUPT的重要性
  - 限制速度误差的增长，将速度重置为零
  - 估计加速度计零偏误差
  - 估计水平姿态角误差
- 总体上，ZUPT可有效限制大部分的惯导长期误差项

实用更新2 – CUPT

- 为什么需要坐标更新
  - 当没有高精度外部辅助更新（如GNSS）时，系统将以纯惯导模式工作，即使是导航级惯导，长时间工作也会有很大的导航误差积累（尤其是位置误差）。
- 坐标更新（Coordinate UPdaTe，CUPT）
  - 在某些特定的测量控制点（又称CUPT站点，坐标已知），载体停止运动并与控制点建立关联（如以某种方式对齐）
  - 在每个CUPT站点上，已知坐标值与惯导的位置输出进行对比。

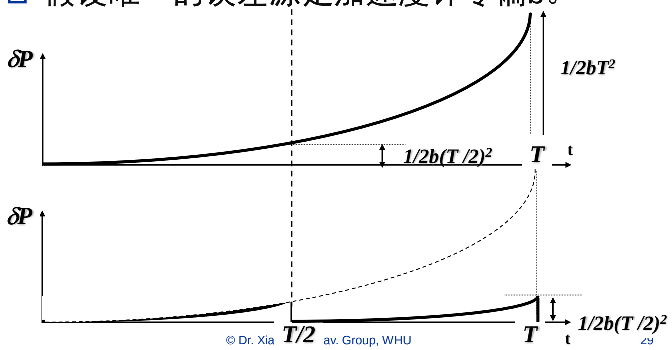
实用更新2 – CUPT

- 怎样用CUPT来提高测量精度
  - 为了在两次CUPT之间改正INS误差，应采用最优估计算法（ 例如Kalman滤波）。
  - 在每个CUPT站点上，INS定位结果与CUPT坐标的差值（三维）被送到Kalman滤波中。



实用更新2 – CUPT

- 例：考虑一个载体沿直线运动了时间T，期间在T/2时刻做了一次CUPT；
- 假设唯一的误差源是加速度计零偏b。



实际问题：统一时标

$$Z(t) = P_{INS}(t) - P_{GPS}(t)$$

采用统一时标

- 组合导航中的INS数据和GPS数据应具有统一的时标。统一时标的精度需求取决于载体的速度（例如，车载应用中60km/h时速时，1ms的时间同步误差等效于1.6cm的定位误差）。
- 时间同步是采用GPS接收机的秒脉冲（PPS）来实现的；PPS秒脉冲通过硬件接口引入计算机
- 例：

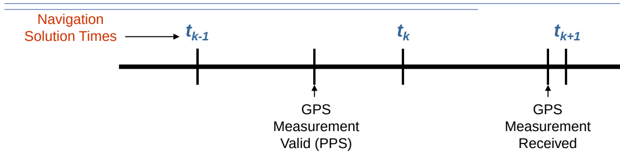
$$\boxed{T_{INS}^{GPS} = T_{INS}^{c} + (T_{PPS}^{GPS} - T_{PPS}^{c})}$$

The computer time of the INS pulse interrupt

The GPS time defined by the PPS

The computer time at the PPS interrupt

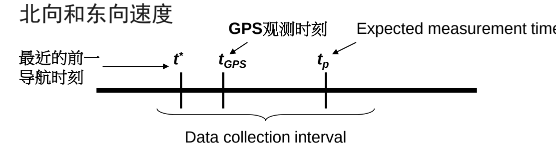
实际问题：采样时刻不同步



- 导航处理器的时钟与GPS接收机的PPS秒脉冲同步
- 通常，惯导的采样时刻并不与GPS的采样时刻恰好对齐。为了准确地计算Kalman滤波的观测量（z），必须将惯导结果内插或外插到GPS观测时刻上（PPS）。
- 例如，一架速度为500km/h的飞机，在0.01s采样周期内就会运动1.4m，会造成不可忽视的等效GPS定位误差。同时，GPS数据在实际接收到的时候也带有延迟。

量测更新：惯导结果外推

- 接收机提示导航处理器下一次GPS观测时刻。
- 导航处理器在下次GPS数据到来之前完成导航结果的外推。
  - 纬度、经度和高程
  - 北向和东向速度



根据已有导航信息外推出GPS观测时刻的导航结果

$$\dot{\varphi}(t^*) = v_N(t^*)/(R)$$

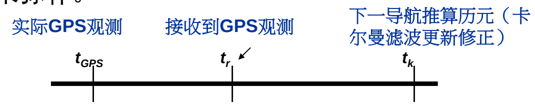
$$\varphi(t_{GPS}) = \varphi(t^*) + (t_{GPS} - t^*)\dot{\varphi}(t^*)$$

$$\dot{\lambda}(t^*) = v_E(t^*)/(R\cos\varphi)$$

$$\lambda(t_{GPS}) = \lambda(t^*) + (t_{GPS} - t^*)\dot{\lambda}(t^*)$$

实时导航中观测量滞后的问题

- GPS数据反映的是GPS采样时刻t_{GPS}的导航信息，但导航处理器实际接收到GPS数据是在稍晚一些的时刻t_r。
- 而由GPS数据形成的KF观测量（$\mathbf{z}$）必须反映组合导航当前更新时刻t_k。这个时间差用状态转移矩阵来弥补。



$$\mathbf{z}(t_{GPS}) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t_{GPS})$$

$$\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{\Phi}(t_k, t_{GPS})\mathbf{x}(t_{GPS})$$

$$\mathbf{x}(t_{GPS}) = \mathbf{\Phi}^{-1}(t_k, t_{GPS})\mathbf{x}(t_k)$$

其中$\mathbf{\Phi}^{-1}(t_k, t_{GPS}) = \mathbf{\Phi}(t_{GPS}, t_k)$

$$\boxed{\mathbf{z}(t_{GPS}) = \mathbf{H}\mathbf{\Phi}^{-1}(t_k, t_{GPS})\mathbf{x}(t_k)}$$

实际的观测矩阵

实时导航中观测量滞后的问题（续）

$\mathbf{\Phi}^{-1}$

- 假设F在短时间周期T 内变化不太剧烈，且$\mathbf{F}(t_k)T \ll \mathbf{I}$

$$\mathbf{\Phi}(t_k, t_{k-1}) \approx e^{\mathbf{F}_{k-1}T}$$

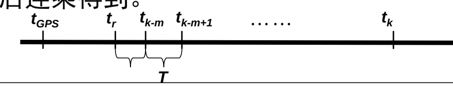
$$\approx \mathbf{I} + \mathbf{F}_{k-1}T + \frac{1}{2!}\mathbf{F}_{k-1}^2T^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{F}_{k-1}^3T^3 + \cdots \qquad T = t_k - t_{k-1}$$

- 泰勒展开取前几项，取决于时间间隔T和预期的载体动态。对于典型机载系统，前3~4项就足够了。

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t_k, t_{k-1}) \approx e^{-\mathbf{F}_{k-1}T}$$

$$\approx \mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}T + \frac{1}{2!}\mathbf{F}_{k-1}^2T^2 - \frac{1}{3!}\mathbf{F}_{k-1}^3T^3 + \cdots \qquad T = t_k - t_{k-1}$$

- 如果观测量滞后大于惯导解算周期，则将所需状态转移的时间间隔分为若干份，计算每一份的状态转移矩阵后连乘得到。



$$\boxed{\mathbf{\Phi}^{-1}(t_k, t_{GPS}) = \left[\mathbf{\Phi}(t_k, t_{k-1})\mathbf{\Phi}(t_{k-1}, t_{k-2})\mathbf{\Phi}(t_{k-2}, t_{k-3})\cdots\mathbf{\Phi}(t_{k-m+1}, t_{k-m})\mathbf{\Phi}(t_{k-m}, t_{GPS})\right]^{-1}}$$